Теорема Гёделя и теория алгоритмов

В. А. Успенский

Доклады Академии Наук СССР, 1953, том 91, № 4, с. 737–740
(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 8 VI 1953)

1. Предварительные замечания В работе [3] Гёдель показал, что попытка аксиоматического построения арифметики неизбежно приводит к дедуктивно-неполному исчислению, т.е. к исчислению, в котором существует формула, интерпретируемая как содержательно-истинное высказывание о натуральных чисел и вместе с тем недоказуемая в этом исчислении. Более того в [3] был указан эффективный способ построения такой формулы. Настоящая заметка содержит результаты предпринятого по инициативе А. Н. Колмогорова выяснения общих причин такого положения вещей. При этом обнаруживается роль теории алгоритмов в вопросах дедуктивной полноты.

Мы скажем, что множество натуральных чисел R *порождается* функцией φ, если R есть множество значений φ. Каждой системе равенств, задающей частично-рекурсивную функцию φ, можно отнести некоторое натуральное число, по которому система равенств однозначно восстанавливается; это число называется номером функции φ [5]. Номером рекурсивно-перечислимого множества R мы назовем любое число, являющееся одним из номеров одной из частично-рекурсивных функций, порождающих R.

2. Эффективная неотделимость. Говорят, что множества E_1 и E_2 отделяются множествами H_1 и H_2, если $E_1 \subseteq H_1$, $E_2 \subseteq H_2$, $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. Множества E_1 и E_2 называются рекурсивно-неотделимыми [2], а короче — *неотделимыми*, если они не отделяются никаким рекурсивными множествами. Можно построить два непересекающихся рекурсивно-перечислимых множества, являющихся неотделимыми (впервые такие множества построены П. С. Новиковым; дальнейшие примеры принадлежат Б. А. Трахтенброту [2]).

Введем понятие эффективной неотделимости. Множества E_1 и E_2 назовем *эффективно-неотделимыми*, коль скоро существует такая частично-рекурсивная функция $\nu(x, y)$, что если n_1 и n_2 суть номера рекурсивно-перечислимых множеств H_1 и H_2, отделяющих E_1 и E_2, то $\nu(n_1, n_2)$ существует, но не принадлежит $H_1 \cup H_2$.

Теорема 1. *Существуют два эффективно-неотделимых непересекающихся рекурсивно-перечислимых множества.*

Более того, эффективно-неотделимыми являются все известные до сего времени неотделимые множества.

3. Дедуктивные исчисления. Для любого конечного множества $\mathcal{Z}$ «знаков» будем обозначать через $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ множество всевозможных конечных строчек, составленных из этих знаков («слов в алфавите $\mathcal{Z}$» по А. А. Маркову [1]). Знаки из $\mathcal{Z}$ занумеруем числами $1, 2, \dots, n$, где n — число знаков в $\mathcal{Z}$; каждой строчке $A = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j$, где α_μ суть знаки из $\mathcal{Z}$, отнесем в качестве номера число $N(A) = 2^{b(\alpha_1)} \cdot 3^{b(\alpha_2)} \cdot \ldots \cdot {p_j}^{b(\alpha_j)}$, где p_j есть j-е простое число, а $b(\alpha)$ — номер знака α.

Дедуктивное исчисление Π есть совокупность следующих образований:

1) конечного множества $\mathcal{Z}$ элементарных знаков (строчки из $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ называются «формулами» исчисления Π);
2) конечного множества $A_1, \dots, A_p$ формул из $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$, называемых «аксиомами»;
3) конечного множества $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ алгоритмов, называемых «правилами вывода».

При этом алгоритм Γ_i $(i = 1, 2, \dots, q)$ способен «перерабатывать» лишь строчки вида

$$X_1, X_2, \ldots, X_{k_i}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{l_i},$$

где k_i и l_i — фиксированные неотрицательные числа, X_μ и Y_ν — формулы из $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$, а запятая «,» — знак, не входящий в $\mathcal{Z}$. Для любой строчки описанного сейчас вида алгоритм Γ_i или дает формулу из $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ или ничего не дает. В целях уточнения термина «алгоритм» примем следующее основное допущение:

$$\text{если } Z = \Gamma_i(X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i}),$$
$$\text{то } N(Z) = \varphi_i(N(X_1), \ldots, N(X_{k_i}), N(Y_1), \ldots, N(Y_{l_i})),$$

где φ_i — частично-рекурсивная функция.

В $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ образуется подмножество *выводимых* формул по следующему закону: все аксиомы выводимы; далее, если $X_1, \ldots, X_{k_i}$ выводимы и $Z = \Gamma_i(X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i})$, то и Z выводима. Понятие дедуктивного исчисления можно несколько сузить, потребовав, чтобы для каждого правила вывода Γ_i существовал алгоритм Δ_i, позволяющий для всякой строчки $X_1, \ldots, X_{k_i}, Y_1, \ldots, Y_{l_i}$ определять, принадлежит ли она области применимости Γ_i или нет. Для дальнейшего безразлично, как понимать термин «дедуктивное исчисление» — в широком смысле или в узком: все утверждения, которые будут высказаны, остаются справедливыми при обоих пониманиях.

Ниже мы будем рассматривать лишь исчисления «с отрицанием», т.е. удовлетворяющие условию

4) в $\mathcal{Z}$ выделен некоторый определенный знак, для которого примем стандартное обозначение $\neg$.

Если A — формула, то формулу $\neg A$ назовем отрицанием A; формулу $\underbrace{\neg\neg\ldots\neg}_{n \text{ раз}} A$ назовем n-кратным отрицанием A.

Рассмотрим произвольное подмножество[1] $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{Z})$, обладающее следующими свойствами:

а) существует алгоритм, позволяющий для всякой формулы $A \in \mathcal{S}(\mathcal{Z})$ определить, принадлежит A к $\mathcal{B}$ или нет;

б) если $A \in \mathcal{B}$, то и $\neg A \in \mathcal{B}$.

Можно показать, что эти свойства множества $\mathcal{B}$ не зависят от того, в каком объемлющем множестве $\mathcal{S}(\mathcal{Z})$ мы его рассматриваем. Исчисление Π высекает в $\mathcal{B}$ подмножество $\mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi)$ выводимых формул и подмножество $\mathcal{L}_\mathcal{B}(\Pi)$ формул, отрицания которых выводимы. В применении к $\mathcal{B}$ исчисление Π называется *непротиворечивым*, если $\mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi) \cap \mathcal{L}_\mathcal{B}(\Pi) = \varnothing$, и *полным*, если $\mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi) \cup \mathcal{L}_\mathcal{B}(\Pi) = \mathcal{B}$. Исчисление Π' назовем *усилением* исчисления Π в применении к $\mathcal{B}$, если $\mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi') \supseteq \mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi)$. Исчисление Π назовем *непополнимым* в применении к $\mathcal{B}$, если оно не допускает полного и непротиворечивого усиления. Множества номеров, соответствующие множествам $\mathcal{K}_\mathcal{B}(\Pi)$ и $\mathcal{L}_\mathcal{B}(\Pi)$, обозначим через $K_\mathcal{B}(\Pi)$ и $L_\mathcal{B}(\Pi)$; легко показать, что оба эти множества рекурсивно-перечислимы. Исчисление Π назовем *эффективно-непополнимым* в применении к $\mathcal{B}$, коль скоро существует такая частично-рекурсивная функция $\gamma(x)$, что если n есть номер рекурсивно-перечислимого множества $K_\mathcal{B}(\Pi')$, где Π' — непротиворечивое усиление исчисления Π, то $\gamma(n)$ есть номер формулы из $\mathcal{B}$, неразрешимой в Π'. При этом формула называется *неразрешимой* в исчислении, если ни она, ни ее отрицание не выводимы в этом исчислении. В дальнейшем множество $\mathcal{B}$ будет всегда фиксированным, поэтому слова «в применении к $\mathcal{B}$», равно как и индекс $\mathcal{B}$ будут для краткости в большинстве случаев опускаться.

4. Регулярные исчисления. Дедуктивное исчисление Π назовем D_1-*исчислением* в применении к $\mathcal{B}$, если для всякой формулы $A \in \mathcal{B}$ из выводимости A следует выводимость $\neg\neg A$. Дедуктивное исчисление Π назовем *регулярным* в применении к $\mathcal{B}$, если оно есть D_1-исчисление и для всякой формулы $A \in \mathcal{B}$ из выводимости $\neg\neg\neg A$ следует выводимость $\neg A$.

Теорема 2. *Необходимым и достаточным условием непополнимости регулярного исчисления* Π *является неотделимость множеств* $K(\Pi)$ *и* $L(\Pi)$.

Следуя Тарскому [6], назовем исчисление Π *разрешимым* в применении к $\mathcal{B}$, если $K(\Pi)$ есть рекурсивное множество, и *существенно неразрешимым*, если Π непротиворечиво и не допускает непротиворечивого разрешимого усиления.

[1] Аналог замкнутой формулы, или *предложения. — Прим. наборщика.*

Теорема 3. *Регулярное исчисление тогда и только тогда существенно неразрешимо, когда оно непротиворечиво и непополнимо* (ср. [6]).

Теорема 4. *Эффективная неотделимость $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ необходима и достаточна для эффективной непополнимости регулярного исчисления Π.*

Отнесем к множеству[2] $\mathcal{X}(\mathcal{B})$ всякую формулу $A \in \mathcal{B}$, для которой не существует формулы $B \in \mathcal{B}$ такой, что $\neg B = A$.

Теорема 5. *Пусть D_1-исчисление Π эффективно-непополнимо в применении к $\mathcal{B}$. Тогда существует такая частично-рекурсивная функция $\tilde{\gamma}(x)$, что если n есть номер рекурсивно-перечислимого множества $K_{\mathcal{B}}(\Pi')$, где Π' — непротиворечивое усиление Π, то $\tilde{\gamma}(n)$ есть номер формулы из $\mathcal{X}(\mathcal{B})$, неразрешимой в Π'.*

5. Применение к теореме Гёделя. Пусть для каждого натурального m определена формула $F(m) \in \mathcal{S}(\mathcal{Z})$, причем выполняются следующие условия:

а) существует обще-рекурсивная функция $f(x)$ такая, что $f(m)$ есть номер формулы $F(m)$;
б) множество номеров формул $F(m)$ рекурсивно.

Пусть, далее, E_1 и E_2 — эффективно-неотделимые множества. Образуем множество $\mathcal{B}$, состоящее из всех формул вида $\neg\neg\ldots\neg F(m)$. Можно построить дедуктивное исчисление Π_0 такое, что $\mathcal{K}(\Pi_0)$ состоит из четнократных отрицаний формул $F(m)$ при $m \in E_1$ и нечетнократных отрицаний $F(m)$ при $m \in E_2$. Легко показать, что $K(\Pi_0)$ и $L(\Pi_0)$ эффективно-неотделимы. Применяя последовательно теоремы 4 и 5, получаем, что для всякого непротиворечивого исчисления Π', являющегося усилением исчисления Π_0, алгоритмически строится формула $F(m)$, неразрешимая в Π'; более точно, существует такая частично-рекурсивная функция $\zeta(x)$, что если n — номер $K(\Pi')$, где Π' — непротиворечивое усиление Π_0, то $F(\zeta(n))$ неразрешима в Π'.

Отсюда легко следует теорема Гёделя. В качестве E_1 и E_2 возьмем какие-нибудь непересекающиеся эффективно-неотделимые рекурсивно-перечислимые множества (см. теорему 1). Известно [4], что всякое рекурсивно-перечислимое множество может быть порождено примитивно-рекурсивной функцией. Пусть $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ — примитивно-рекурсивные функции, порождающие, соответственно, E_1 и E_2. Положим

$$F(m) \;=\; \exists x\,[\,\theta_1(x) = m \;\&\; \forall y\,(\,y \leqslant x \;\to\; \neg(\theta_2(y) = m)\,)\,].$$

Формула $F(m)$ содержательно эквивалентна утверждению $m \in E_1$. Построим, как указано, множество формул $\mathcal{B}$ и исчисление Π_0. Обычно дедуктивные исчисления, описывающие арифметику, являются усилениями Π_0, поэтому для каждого из них алгоритмически указывается неразрешимая формула $F(m)$. Нам остается заметить, что для всякого m из неразрешимости $F(m)$ вытекает, что $\neg F(m)$ истинна, но невыводима.

6. Нерегулярные исчисления.

Теорема 6. *Неотделимость $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ достаточна для непополнимости произвольного исчисления Π.*

Теорема 7. *Если $\mathcal{B}$ таково, что $\mathcal{X}(\mathcal{B})$ бесконечно, то существует непротиворечивое исчисление, являющееся непополнимым разрешимым D_1-исчислением в применении к $\mathcal{B}$.*

Из теоремы 7 следует, что теоремы 2 и 3 перестают быть верными при замене слов «регулярное исчисление» словами «D_1-исчисление».

Теорема 8. *Эффективная неотделимость $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ достаточна для эффективной непополнимости произвольного исчисления Π.*

[2]Замкнутых формул, не начинающихся с отрицания. — *Прим. наборщика.*

Отнесем к множеству $\mathcal{K}^+(\Pi)$ всякую формулу A, обладающую следующими свойствами:

а) $A \in \mathcal{X}(\mathcal{B})$;

б) существует такое четное число s, что s-кратное отрицание A принадлежит $\mathcal{K}(\Pi)$.

Аналогично строится множество $\mathcal{L}^+(\Pi)$. Соответствующие множества номеров обозначим $K^+(\Pi)$ и $L^+(\Pi)$. Исчисление Π назовем *согласованным* в применении к $\mathcal{B}$, если $K^+(\Pi) \cap L^+(\Pi) = \varnothing$. Из согласованности исчисления следует его непротиворечивость; в регулярном случае эти понятия совпадают.

Теорема 9. *Всякое несогласованное исчисление непополнимо.*

Теорема 10. *Необходимым и достаточным условием непополнимости согласованного исчисления* Π *является неотделимость множеств* $K^+(\Pi)$ *и* $L^+(\Pi)$.

Назовем исчисление Π *слабо эффективно-непополнимым* в применении к $\mathcal{B}$, коль скоро существует такая частично-рекурсивная функция $\delta(x)$, что если n — номер множества $K(\Pi')$, где Π' — согласованное усиление исчисления Π, то $\delta(n)$ есть номер формулы из $\mathcal{B}$, неразрешимой в Π'.

Теорема 11. *Необходимым и достаточным условием слабой эффективной непополнимости согласованного исчисления* Π *является эффективная неотделимость множеств* $K^+(\Pi)$ *и* $L^+(\Pi)$.

7. Проблемы. В заключение сформулируем несколько нерешенных, связанных с изложенным выше, проблем:

I. Существуют ли неотделимые множества, не являющиеся эффективно-неотделимыми?

II. Существует ли непополнимое исчисление, не являющееся эффективно-непополнимым?

III. Является ли эффективная неотделимость $K(\Pi)$ и $L(\Pi)$ необходимой для эффективной непополнимости нерегулярных исчислений?

IV. Существует ли слабо эффективно-непополнимое исчисление, не являющееся эффективно-непополнимым?

V. Существует ли непополнимое исчисление, не являющееся слабо эффективно-непополнимым?

Автор благодарен А. Н. Колмогорову за ряд советов. В частности, А. Н. Колмогорову принадлежит определение «исчисления» и указание на достаточность условия теоремы 2.

Поступило 22 V 1953

Список литературы

[1] Марков А.А. Теория алгорифмов. *Труды Математического института им. Стеклова АН СССР*, т. 38 (1951), с. 176–189.

[2] Трахтенброт Б.А. О рекурсивной отделимости. *Доклады АН СССР*, т. 88 (1953), № 6, с. 953–956.

[3] Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 38 (1931), num. 1, 173–198. DOI: 10.1007/BF01700692.

[4] Rosser J.B. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), num. 3, pp. 87–91. DOI: 10.2307/2269028.

[5] Kleene S.C. Recursive predicates and quantifiers. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 53 (1943), pp. 41–73. DOI: 10.1090/S0002-9947-1943-0007371-8.

[6] Tarski A. On essential undecidability. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), num. 1, p. 75 (abstract). DOI: 10.2307/2269014.

Набрано 13.11.2018 (ezolin@yandex.ru). Изменения, внесенные при наборе текста:
– термины выделяем *курсивом*, а не р а з р я д к о й.
– в библиографии даны полные названия статей и журналов.
– пустое множество обозначаем $\varnothing$, а не Λ.
– ссылки на библиографию указываем как [1], [2], а не (^{1}), (^{2}).
– некоторые перечисления 1) 2) 3) сделаны в виде списков.
– в тексте неразборчиво, как обозначается исчисление: Π или II; мы используем первое (можно: $\mathbb{I}$).
– кванторы пишем $\exists x$ и $\forall x$, а не (Ex) и (y).
– мы пишем $\mathcal{ABC}\ldots$ вместо готических букв $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\ldots$
– указанная замена шрифта сделана макрокомандой.